Föreläsning 10

Vi kommer nu att använda våra kunskaper om derivator för att bland annat skissera grafer och förändringshastighetsproblem.

Låt oss börja med ett exempel.

Ex:

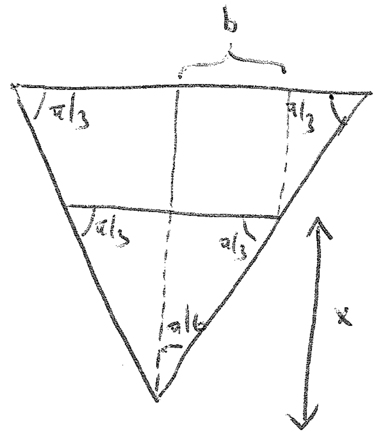
Ett vattentråg med tvärsnitt i form av en liksidig triangel fylls med en hastighet av 4 kubikmeter per minut. Om tråget är 12 m långt, hur fort höjer sig då vattennivån då vattennivån är $1\frac{1}{2}$ meter.

LF:

Låt x vara vattendjupet i meter, och låt V vara volymen i kubikmeter. Om vi skriver om frågan matematiskt så lyder den: Hitta $\frac{dx}{dt}$ då $x=\frac{3}{2}$ givet att

$\frac{dV}{dt} = 4\ m^3/min$.

Låt oss rita en figur.



Volymen av vatten i tråget kommer först bero på x, så då kommer vi få med $\frac{dx}{dt}$ genom implicit derivering.

Volymen a vattentråget med höjd x ges av arean av tvärsnittet med höjd x gånger längden av tråget, dvs 12m.

Vi börjar med att beräkna arean av tvär-snittet med höjd x. För detta behöver vi bredden b.

Vi har att

$$\tan \pi/3 = \frac{x}{b}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Därför är arean av tvärsnittet med höjd x $A(x) = \frac{2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot x}{2} = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{3}}$

Volymen av vattentråget med höjd x ges därför av

$$V(x) = 12 \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}\sqrt{3}}$$

Derivera nu V implicit m.a.p t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{12 \cdot 2x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Då: $x = \frac{3}{2}$ och $\frac{dV}{dt} = 4$ så får vi att

$$4 = \frac{12 \cdot 3}{\sqrt{3}} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{3}}{12 \cdot 3} = \frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{dx}{dt}$$

Alltså då vattnet är på höjd $3/2$ meter så höjs vattenytan med $\frac{\sqrt{3}}{9}$ meter/min. $\approx 0{,}19$ meter/min.

Metod för att lösa sådana här problem:

1/ Rita en bild över problemet

2/ Identifiera och formulera matematiska formler.

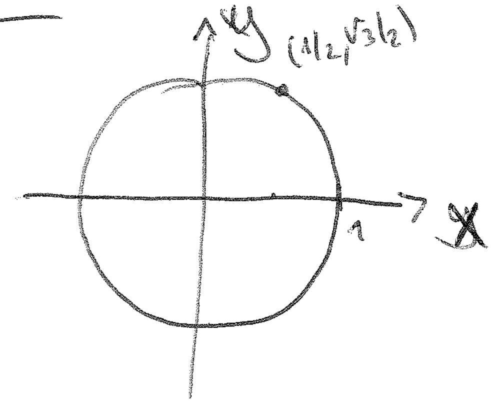
3/ Derivera den formel som du vill hitta förändringshastigheten

4/ Svara med ordentligt svar med rätt för enheter.

Ex:

Ett objekt transporteras klockvist runt enhetscirkeln $x^2+y^2=1$. Då objektet passerar punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$ så avtar dess y-koordinat med 3 enheter/sekund. Vilken förändringshastighet har x-koordinaten.

LF:



Vi ska hitta $\frac{dx}{dt}$ då $x = 1/2$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\frac{dy}{dt} = -3$.

Derivera $x^2+y^2=1$ implicit m.a.p t:

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=0.$$

Sätt nu in $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\frac{dy}{dt}=-3$. Då får vi att

$$2\cdot\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot(-3)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}=3\sqrt{3}$$

Alltså passerar objektet punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$ med en hastighet ~~hos~~ x-koordinaten som är $3\sqrt{3}$ enheter/sekund.

Vi fortsätter nu med att studera funktioner med hjälp av derivator. Kom ihåg att vi redan vet detta:

a) Om $f'(x)>0$ $\forall x$ i ett intervall I, då växer f på I.

b) Om $f'(x)<0$ $\forall x$ i ett intervall I, då avtar f på I.

c) Om $f'(x)\geq 0$ $\forall x$ i ett intervall I, då är f ickeavtagande på I

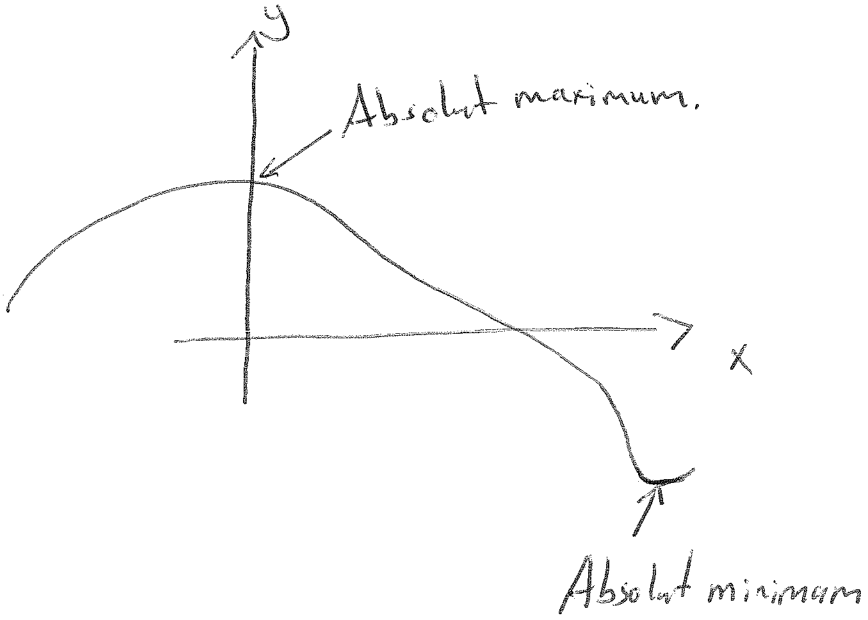
d) Om $f'(x)\leq 0$ $\forall x$ i ett intervall I, då är f ickeväxande på I.

Definition:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I. Vi säger att f har ett absolut maximum i $x_0 \in I$ om $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$. Det absoluta maximumet är $f(x_0)$.

Vi säger att f har ett absolut minimum i $x_0 \in I$ om $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in I$. Det absoluta minimumet är $f(x_0)$.

Ex:



Ex:

Låt $f(x) = \cos(x)$. Då är $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Vi har att $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi \cdot n$ $n \in \mathbb{Z}$.

och $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$.

Alltså antar f ett absolut maximum i $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vidare så antar f ett absolut minimum i $x = \pi \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.

När existerar absoluta maximum och minimum.

Sats:

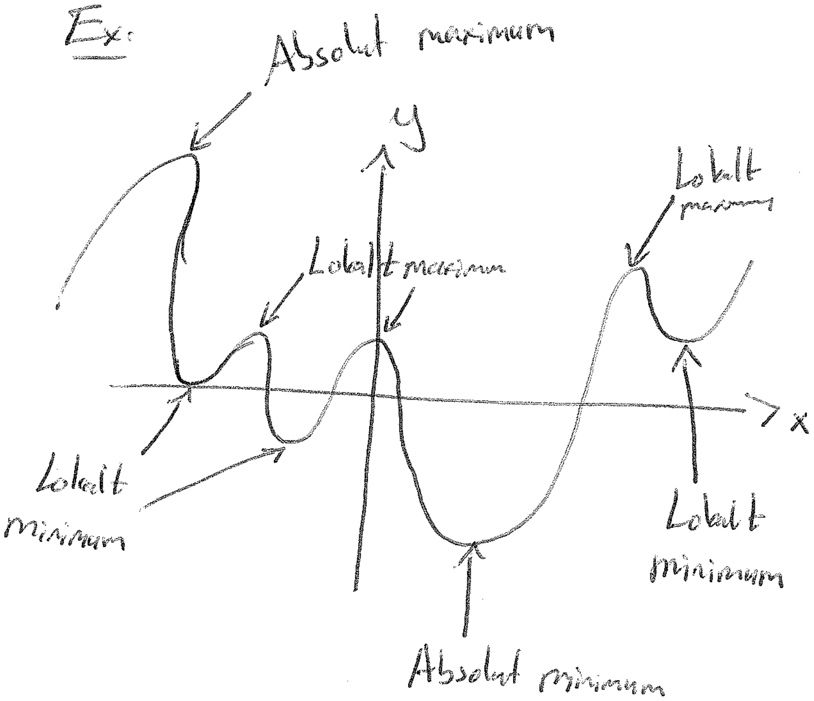
Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett slutet intervall på formen $[a,b]$ (kompakt), eller så är $I = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$. Antag att f är kontinuerlig på I, då antar f ett absolut maximum och ett absolut minimum.

De absoluta maximum och minimum är globala maximum och minimum. Vi kan även fråga oss om det finns maximum och minimum på delintervall $J \subset I$. Dessa kallas för lokala maximum och lokala minimum.

Def:

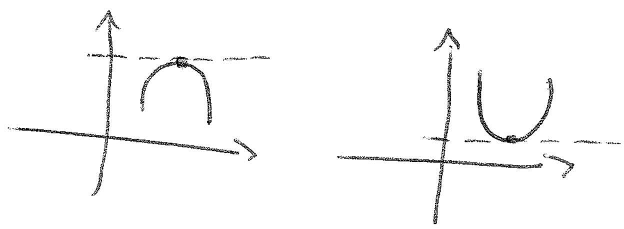
Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I.
Vi säger att f har ett lokalt maximum i $x_0 \in I$ om det finns ett $h > 0$ så att $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$ så att $|x - x_0| < h$.
Vi säger att f har ett lokalt minimum i $x_0 \in I$ om det finns ett $h > 0$ så att $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in I$ så att $|x - x_0| < h$.

Ex:

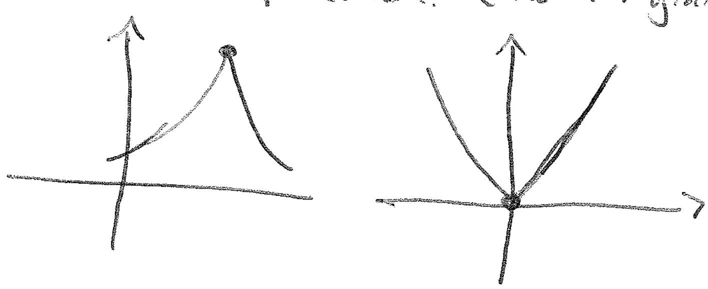


Vi kallar lokala maximum och lokala minimum för lokala extrempunkter. Det finns olika typer av lokala extrempunkter: ($f: I \to \mathbb{R}$)

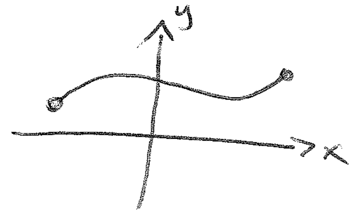
(1): Kritiska punkter för f: De $x \in I$ så att $f'(x) = 0$



(2): Singulära punkter för f: De $x \in I$ så att $f'(x)$ inte är definierad. (Hörn i grafen).



(3): Ändpunkter till $D(f) = I$, dvs om $I = (a,b)$ så är a och b ändpunkter.



Sats:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I. Om f har ett lokalt maximum och/eller lokalt minimum i $x_0 \in I$, då måste x_0 vara en kritisk punkt för f, en singulär punkt för f, eller en ändpunkt för f.

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Vi ska klassificera de lokala extrempunkterna.

Vi börjar med kritiska punkter:

Derivering ger $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \implies x = 0.$$

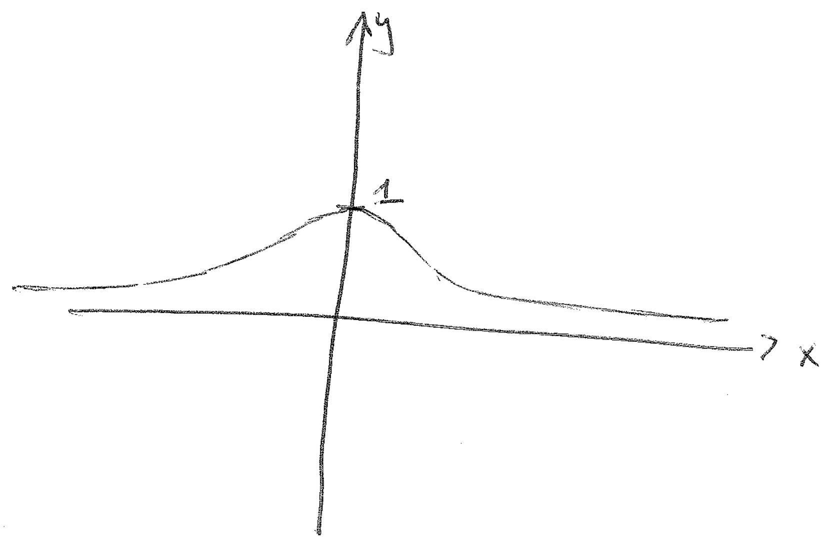
Alltså är $x = 0$ en kritisk punkt.

Vi har att $f(0) = 1$ och att $f(\pm 1) = 1/2$, så $f(0) = 1$ är ett lokalt maximum.

Eftersom $x^2+1 \neq 0$ så har f inga singulära punkter. Vidare så har vi att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Detta betyder att vi grovt kan skissera grafen:



Ex:

Betrakta $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definierad genom

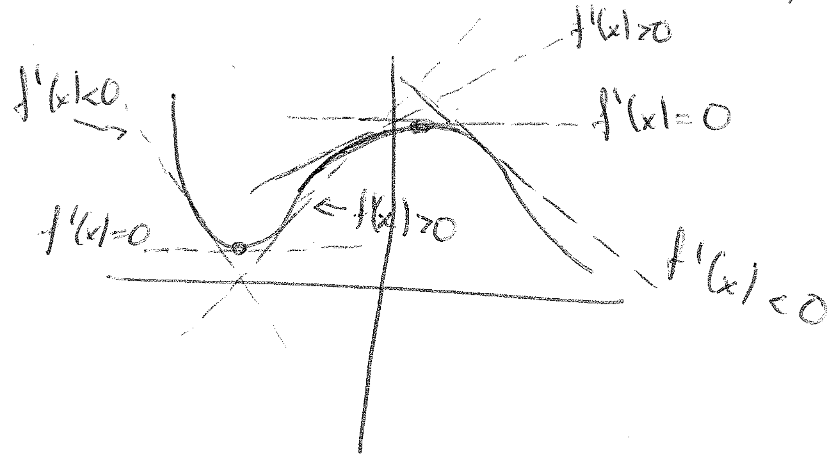
$$f(x) = x^2 + 2x + 4.$$

Har f några lokala maximum/minimum? Globala?

Derivering ger att $f'(x) = 2x+2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin [0,1]$

Därför har f inga kritiska punkter på $[0,1]$, så inga lokala max/min punkter. I ändpunkterna så gäller att $f(0)=4$ och $f(1) = 1^2 + 2\cdot 1 + 4 = 7$. Därför är 4 ett globalt minimum (absolut) och 7 ett globalt maximum på $[0,1]$

Till höger och vänster om lokala max/minpunkter
så uppför sig derivata på ett speciellt vis:



Alltså om x_0 är ett lokalt minimum så är $f'(x)<0$ till vänster om x_0 och $f'(x)>0$ till höger om x_0.

Vidare om x_0 är ett lokalt maximum så är $f'(x)>0$ till vänster om x_0 och $f'(x)<0$ till höger om x_0.

Anmärkning:

Om $f'(x)>0$ på båda sidorna av ~~ett~~ en kritisk punkt x_0 så är x_0 inte en
(eller singulärpunkt)

max eller minpunkt. Samma gäller om $f'(x)<0$ på båda sidorna av x_0.

Ex:

Betrakta funktionen f definierad genom

$$f(x)=x^2e^{-x^2}$$

Vi ska skissa dess graf. Vi börjar med att klassificera dess extrempunkter.

Kritiska punkter: $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x\cdot x^2e^{-x^2} =$

$$= e^{-x^2}\cdot 2x(1-x^2).$$

Eftersom $e^{-x^2}\neq 0$ så är $f'(x)=0$ om och endast om $2x(1-x^2)=0$, dvs om $x=0$ eller $x=\pm 1$.

Vi ska göra ett så kallat teckenschema.

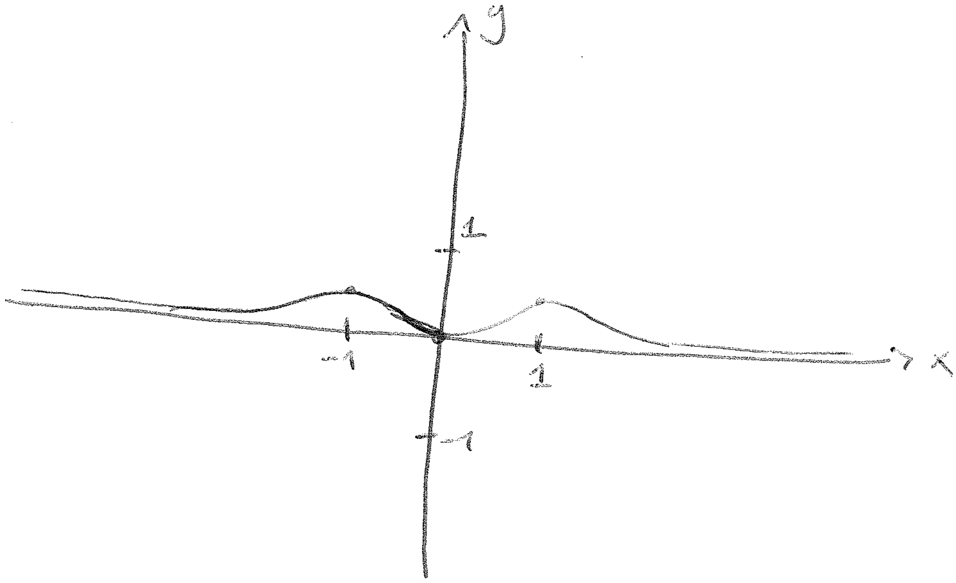
x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$ Max	$\searrow$	$\rightarrow$ Min.	$\nearrow$	$\rightarrow$ Max	$\searrow$

Vi har att $f(\pm 1)=e^{-1}$ och $f(0)=0$

Vidare så har vi att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2} = 0.$$

Vi kan nu skissera grafen:



Ex:

Betrakta $f(x) = (x+2)^{2/3}$. Vi ska skissa grafen.
Vi börjar med kritiska punkter:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+2)^{-1/3}$$ Observera att $f'(x) \neq 0$,

men för $x=-2$ så är $f'(x)$ inte definierad.

För $x=-2$ så är $f(x)=0$. Observera även för $x<-2$ så är $f(x)$ ej definierad.

Vi gör ett teckenschema:

x	-2				
$f'(x)$	ej def.	+	+	+	+
$f(x)$	0	↗	↗	↗	↗

f skär y-axeln då är $f(0) = 2^{2/3} \approx 1,59$

Vi kan nu skissa grafen: